三次及四次方程式

李白飛

一個一般的三次方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 經由 $y=x+\frac{b}{3}$ 的代換，可變形為缺二次項的較簡形式：$y^3+py+q=0$，其中 $p=c-\frac{b^2}{3}$，$q=d-\frac{bc}{3}+\frac{2b^3}{27}$，如能解出後者的三個根 $y_1,\ y_2,\ y_3$，則 $x_i=y_i-\frac{b}{3}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 即為原方程的三個根，因此我們就只討論方程式 $y^3+py+q=0.$

我們先將 y 折成兩部分，即令 $y=u+v$，u 與 v 的關係待定，代入原式得

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0$$

即

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

從這裏我們可以看到，如果 $u,\ v$ 滿足 $3uv+p=0$，整個式子驟然簡化，因此令 $v=-\frac{p}{3u}$，亦即令 $y=u-\frac{p}{3u}$，則 $u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0$，亦即 $u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0$，此為 u^3 的二次方程式，故可解得

$$u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}.$$

設 A 為 $-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$ 的一個立方根，而 $B=-\frac{p}{3A}$，因

$$B^3=-\frac{p^3}{27A^3}=-\frac{p^3}{27[\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}]}=-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$$

故 $u=A,\ A\omega,\ A\omega^2,\ B,\ B\omega,\ B\omega^2$，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 為 1 的一個立方虛根，因此 $y=A+B,\ A\omega+B\omega^2$ 或 $A\omega^2+B\omega$，我們很容易可以驗證這三個數確是 $y^3+py+q=0$ 的根，例如 $y=A\omega+B\omega^2$，則 $y^3=A^3+B^3+3\omega A^2B+3\omega^2AB^2=-q-p(A\omega+B\omega^2)=-q-py$

$p.s.\ u_1=A,\ v_1=B$，當 $u=A\omega=u_1\omega,\ v=-\frac{p}{3u}=-\frac{p}{3u_1\omega}=(\frac{-p}{3u_1})\frac{1}{\omega}=$

$v_1\omega^2 = B\omega^2$，當 $u = A\omega^2 = u_1\omega^2,\ v = -\frac{p}{3u} = -\frac{p}{3u_1\omega^2} = (-\frac{p}{3u_1})\frac{1}{\omega^2} = v_1\omega = B\omega$

例：解 $y^3 + 9y - 6 = 0$

解：令 $y = u - \frac{3}{u}$，則 $u^3 - \frac{27}{u^3} - 6 = 0$，即 $u^6 - 6u^3 - 27 = 0$，因此 $u^3 = -3$ 或 9，取 $u = -\sqrt[3]{3}$，則 $y = -\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9},\ -\sqrt[3]{3}\omega + \sqrt[3]{9}\omega^2,\ -\sqrt[3]{3}\omega^2 + \sqrt[3]{9}\omega$

然而上述解法也有不理想的地方，例如 $y^3 - y = 0$，這個方程式可經由因式分解而解得 $= 0,\ 1$ 或 -1，然而利用上法，令 $y = u + \frac{1}{3u}$，則 $u^3 + \frac{1}{27u^3} = 0$，即 $u^3 = \pm\frac{i}{3\sqrt{3}}$，取 $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$，經過化簡，固然終究也得到同樣的解，可是卻麻煩多了，注意此方程式的三個解都是實數，但在運算過程中卻出現了虛數，這種尷尬的情況，是實係數三次方程式具三實根時所呈現的現象，下面我們先介紹實根數的判別法，再介紹求三實根的三角解法。

設 $y^3 + py + q = 0$ 為一實係數三次方程式，其三根分別為 y_1, y_2, y_3，令 $\Delta = (y_1 - y_2)^2(y_2 - y_3)^2(y_3 - y_1)^2$，則 Δ 稱為該方程式的判別式，由根與係數的關係可求得 $\Delta = -27q^2 - 4p^3$，另外，利用 $y_1 = A + B$，$y_2 = A\omega + B\omega^2$，$y_3 = A\omega^2 + B\omega$ 亦可求得：

$$y_1 - y_2 = A(1-\omega) + B(1-\omega^2) = (1-\omega)[A + B(1+\omega)] = (1-\omega)(A - B\omega^2)$$
$$y_2 - y_3 = A(\omega-\omega^2) + B(\omega^2-\omega) = A(\omega-\omega^2) - B(\omega-\omega^2) = (\omega-\omega^2)(A-B)$$
$$y_1 - y_3 = A(1-\omega^2) + B(1-\omega) = A(1-\omega^2) + B(1-\omega^4) = A(1-\omega^2)$$
$$+B(1-\omega^2)(1+\omega^2) = (1-\omega^2)[A + B(1+\omega^2)] = (1-\omega^2)(A - B\omega)$$
$$(1-\omega)(1-\omega^2) = 1 - \omega - \omega^2 + 1 = 2 - (\omega+\omega^2) = 2 - (-1) = 3$$
$$(\omega-\omega^2)^2 = \omega^2 - 2\omega^3 + \omega^4 = \omega^2 - 2\cdot 1 + \omega = (\omega^2+\omega) - 2 = -1 - 2 = -3$$
$$\therefore \omega - \omega^2 = \sqrt{3}i$$
$$(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2(\omega-\omega^2)^2 = 3^2\cdot(-3) = -27$$

由 $x^3 - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$ 代以 $x = A/B$，可得

$$(A-B)(A-B\omega)(A-B\omega^2) = A^3 - B^3 = 2\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}$$

因此 $\Delta = (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2(\omega-\omega^2)^2\cdot(A-B)^2(A-B\omega)^2(A-B\omega^2)^2 = -27\cdot 4[(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3] = -108[(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3] = -27q^2 - 4p^3$

由”虛根成對定理”知，實係數三次方程式可有三實根，或一實根及兩共軛虛根。

當 $y_1,\ y_2,\ y_3$ 皆為實數時，顯然 $\Delta \geq 0$，而 $\Delta = 0$ 意謂 $y_1,\ y_2$ 及 y_3 三者中，至少有二者相等，當 $y_1 = \alpha$ 為實數，$y_2 = \beta + \gamma i, y_3 = \beta - \gamma i$，其 $\beta,\ \gamma$ 皆實數，且 $\gamma \neq 0$，則 $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = [(\alpha - \beta) - \gamma i][(\alpha - \beta) + \gamma i] = (\alpha - \beta)^2 + \gamma^2 > 0$，而 $(y_2 - y_3) = 2\gamma i$，故 $(y_2 - y_3)^2 = -4\gamma^2 < 0$，因此 $\Delta < 0$，所以，我們有下述結論：

(I)$\Delta > 0$ 時，有三相異實根。

(II)$\Delta = 0$ 時，有三實根，其中至少兩根相等。

(III)$\Delta < 0$ 時，有一實根及一對共軛虛根。

當 $\Delta > 0$ 時，$(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$，因此 A 與 B 皆為虛數的立方根，當然也是虛數，然而最後三根 $A + B,\ A\omega + B\omega^2,\ A\omega^2 + B\omega$ 卻都是實數，在這種情形，我們改用下述三角解法較為實際：

因 $y_1 + y_2 + y_3 = 0$，$y_1,\ y_2,\ y_3$ 皆為實數，故可設 $y_1 = r\cos\theta,\ y_2 = r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}),\ y_3 = r\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$，其中 $r > 0,\ 0 \leq \theta < \frac{2\pi}{3}$，只要求出 r 及 θ 值即可，將 $y = r\cos\theta$ 代入原式，得

$$r^3\cos^3\theta + pr\cos\theta + q = 0$$

亦即

$$\cos^3\theta + \frac{p}{r^2}\cos\theta + \frac{q}{r^3} = 0$$

換句話說，我們得找到 r 及 θ 值，使其滿足上式，由三角恆等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 知

$$\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$$

與上式相比較，我們只要要求

$$\begin{cases} \frac{p}{r^2} = -\frac{3}{4} \\ \frac{q}{r^3} = -\frac{1}{4}\cos 3\theta \end{cases}$$

即可，因 $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 < 0$，故 $p < 0$，因此 $r^2 = -\frac{4p}{3}$ 可解得 $r = \sqrt{\frac{-4p}{3}}$ 又

$$-\frac{4q}{r^3} = -\frac{4q}{(-\frac{4p}{3})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\frac{q}{2}}{(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}}$$

的絕對值不超過 1，故 $\cos 3\theta = \frac{-\frac{q}{2}}{(-\frac{p}{3})^{\frac{3}{2}}}$ 亦可解出 θ。

例：$y^3 - 12y - 8\sqrt{2} = 0$

解：因 $p = -12,\ q = -8\sqrt{2}$，故 $(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3 = (4\sqrt{2})^2 + (-4)^3 = 32 - 64 = -32 < 0$，故此方程式有三實根，設 $y = r\cos\theta$，則 $r^3\cos^3\theta - 12r\cos\theta - 8\sqrt{2} = 0$，即 $\cos^3\theta - \frac{12}{r^2}\cos\theta - \frac{8\sqrt{2}}{r^3} = 0$，與 $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta = 0$ 相比較，令 $\frac{12}{r^2} = \frac{3}{4},\ \frac{8\sqrt{2}}{r^3} = \frac{1}{4}\cos 3\theta$，得 $r = 4$ 及 $\cos 3\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$，取 $3\theta = \frac{\pi}{4}$ 即 $\theta = \frac{\pi}{12}(= 15^\circ)$，得 $y = 4\cos 15^\circ,\ 4\cos 135^\circ$ 及 $4\cos 255^\circ$，亦即 $y = \sqrt{6} + \sqrt{2},\ -2\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{6} + \sqrt{2}$。

下面我們將介紹兩種解四次方程的方法，第一種是最早發現（1545 年）的 Ferrari 解法：

一個四次方程式 $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 可改寫為 $x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$，再將左邊配方成 $(x^2 + \frac{1}{2}bx)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c)x^2 - dx - e$，兩邊加以 $(x^2 + \frac{1}{2}bx)y + \frac{1}{4}y^2$，得：

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y)^2 = (\frac{1}{4}b^2 - c + y)x^2 + (\frac{1}{2}by - d)x + \frac{1}{4}y^2 - e$$

右邊成為一個完全平方的充要條件為判別式等於 0，即

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4e)y - b^2e + 4ce - d^2 = 0$$

此三次方程式稱為原方程式的豫解式，設 y_1 為豫解式之一根，則：

$$(x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1)^2 = (m_1x + n_1)^2$$

故 $x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1 = m_1x + n_1$ 或 $x^2 + \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}y_1 = -m_1x - n_1$
這兩個二次方程式的解均為原四次方程的解。

例：$x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 10x + 3 = 0$

解：由 $x^4 + 2x^3 = 12x^2 + 10x - 3$，配方得 $(x^2 + x)^2 = 13x^2 + 10x - 3$，從而 $(x^2 + x + \frac{1}{2}y)^2 = (y + 13)x^2 + (y + 10)x + (\frac{1}{4}y^2 - 3)$，故豫解式為 $(y + 10)^2 - 4(y + 13)(\frac{1}{4}y^2 - 3)$，即 $y^3 + 12y^2 - 32y - 256 = 0$，由綜合除法知 $y = -4$ 為其中一根，代回得 $(x^2 + x - 2)^2 = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$，因此 $x^2 + x - 2 = 3x + 1$ 或 $x^2 + x - 2 = -3x - 1$，亦即 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 或 $x^2 + 4x - 1 = 0$，故 $x = 3$ 或 -1 或 $-2 \pm \sqrt{5}$。

第二種解法，也就是 Descartes 解法，基本原理很簡單，只是分解因式與未定係數而已，將 $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 經過 $y = x + \frac{b}{4}$ 的變換，

可消去次高項而得 $y^4+py^2+qy+r=0$，我們假定 $y^4+py^2+qy+r=(y^2+2ky+l)(y^2-2ky+m)=y^4+(l+m-4k^2)y^2+2k(m-l)y+lm$，比較係數得

$$\begin{cases} l+m-4k^2=p \\ 2k(m-l)=q \\ lm=r \end{cases}$$

若 $k=0$，則 $q=0$，原方程式為 $y^4+py^2+r=0$，可視為 y^2 的二次方程式，假設 $k\neq 0$，由前二式解得 $l=\frac{1}{2}p+2k^2-\frac{q}{4k},\ m=\frac{1}{2}p+2k^2+\frac{q}{4k}$ 代入第三式，整理後得

$$64k^6+32pk^4+4(p^2-4r)k^2-q^2=0$$

此為 k^2 的三次方程式，設 k_1 為其中一解，則 $l_1=\frac{p}{2}+2k_1^2-\frac{q}{4k_1}$ 及 $m_1=\frac{p}{2}+2k_1^2+\frac{q}{4k_1}$ 皆可求得，因此原方程式變為 $(y^2+2k_1y+l_1)(y^2-2k_1y+m_1)=0$

例：$x^4-3x^2+6x-2=0$

解：設 $x^4-3x^2+6x-2=(x^2+2kx+l)(x^2-2kx+m)$
$=x^4+(l+m-4k^2)x^2+2k(m-l)x+lm$，比較係數得 $l+m-4k^2=-3,\ 2k(m-l)=6$，$lm=-2$，消去 $l,\ m$ 得 $16k^6-24k^4+17k^2-9=0$，易見 $k=1$ 為其中一根，則 $l=-1,\ m=2$，因此 $(x^2+2x-1)(x^2-2x+2)=0$，故 $x=-1\pm\sqrt{2}$ 或 $-1\pm i$