向量微積分講義

雷斌正

(General)Stoke's Theorem:
Suppose M is a compact oriented manifold in $\mathbb{R}^n$ and ω is a (k-1)-form differential, then:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

∂M 為 M 之邊界
這稱為廣義的 Stoke 定理，它的特殊情形有

(a) 當 n=3, k=3 時，它變成了
Gauss' Divergence 定理：
M 為 $\mathbb{R}^3$ 中之立體，∂M 為其邊界，向量場 $\vec{A} = \vec{A}(a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$
x, y, z 為 $\mathbb{R}^3$ 中之變數，u, v 為 ∂M（假設是個曲面）上的曲線座標參數，則

$$\int\int\int_M div\vec{A}\, dV = \int\int_{\partial M} \vec{A}\cdot\vec{n}\, dS$$

左邊是個三重體積分，右邊是在 ∂M 上的二維面積分，dV=dxdydz，假設 $\xi = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = y_u z_v - z_u y_v$（這稱為 y,z 對 u,v 的 Jacobian），$\eta = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = z_u x_v - x_u z_v$，$\zeta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - y_u x_v$，則 $dS = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\, dudv,\ div\vec{A} = a_x + b_y + c_z$ 稱為 $\vec{A}$ 之散度 (divergence)，$\vec{n}$ 為曲面 ∂M 之外指單位法向量，$\vec{n} = \frac{(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}$
而定理又可寫成：

$$\int\int\int_M (a_x+b_y+c_z)dxdydz = \int\int_{\partial M}[a(x,y,z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + b(x,y,z)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + c(x,y,z)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv = \int\int_{\partial M}[a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy]$$

＜證明＞
此特例中 $\omega = \vec{A}\cdot\vec{n}\ dS$，僅需證出 $d\omega = div\vec{A}\ dV$ 即可，
套用全微分 (Total Differential) 之定義：

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

得 $df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ $\qquad (*)$
$\vec{A}\cdot\vec{n}\ dS$ 可寫成：
$a(x,y,z)dydz + b(x,y,z)dzdx + c(x,y,z)dxdy$
$= ady\wedge dz + bdz\wedge dx + cdx\wedge dy$
其中 $\wedge$ 像外積一樣，$dy\wedge dx = -dx\wedge dy,\ dx\wedge dx = 0$
故 $d\omega = d(\vec{A}\cdot\vec{n}\ dS)$
$= d(ady\wedge dz + bdz\wedge dx + cdx\wedge dy)$
（用 $(*)$）$= a_x dy\wedge dz\wedge dx + b_x dz\wedge dx\wedge dx + c_x dx\wedge dy\wedge dx$
$\quad + a_y dy\wedge dz\wedge dy + b_y dz\wedge dx\wedge dy + c_y dx\wedge dy\wedge dy$
$\quad + a_z dy\wedge dz\wedge dz + b_z dz\wedge dx\wedge dz + c_z dx\wedge dy\wedge dz$
（交換順序後）
$= a_x dx\wedge dy\wedge dz + b_y dx\wedge dy\wedge dz + c_z dx\wedge dy\wedge dz$
$= (a_x + b_y + c_z)dxdydz$
$= div\vec{A}\ dV$ ＜得證＞

(b) 當 n=3, k=2 時，(General)Stoke 定理變成了：
(Special)Stoke 定理：
M 為 $\mathbb{R}^3$ 中之曲面，∂M 為其邊界（曲線），向量場 $\vec{A} = \vec{A}(a(x,y,z), b(x,y,z), c(x,y,z))$
$x,\ y,\ z$ 如上，$\vec{n}$ 為 M 上（凸出面）之單位法向量，$\vec{t}$ 為曲線 ∂M 之單位切向量，s 為曲線 ∂M 上之長度變數，則

$$\int\int_M (curl\vec{A})\cdot\vec{n}\ dS = \int_{\partial M}\vec{A}\cdot\vec{t}\ ds$$

左式為二維曲面積分，右式為一維線積分，其中 $curl\vec{A} = (c_y - b_z, a_z - c_x, b_x - a_y)$〔補充：若把 ∇ 定義為算子 $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$，則 $div\vec{A}$ 可寫成 $\nabla\cdot\vec{A}$，$curl\vec{A}$ 可寫成 $\nabla\times\vec{A}$〕稱為 $\vec{A}$ 之旋度 (curl)，
現把 u,v 視為 M 上之曲線座標參數，$\xi = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$ $\eta = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ $\zeta = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$$\vec{n} = \frac{(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}},\ dS = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}dudv$$

$$\vec{t} = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}) = \frac{(x'(t),\ y'(t),\ z'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}},\ ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt$$

則此定理之變數型：

$$\int\int_M [(c_y - b_z)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (a_z - c_x)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (b_x - a_y)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$$
$$= \int_{\partial M} (a(x,y,z)\frac{dx}{ds} + b(x,y,z)\frac{dy}{ds} + c(x,y,z)\frac{dz}{ds})ds$$

或：

$$\int\int_M (c_y - b_z)dydz + (a_z - c_x)dzdx + (b_x - a_y)dxdy = \int_{\partial M} adx + bdy + cdz \tag{$\star$}$$

＜證明＞
此特例中 $\omega = \vec{A} \cdot \vec{t}\,ds$ 僅需證出 $d\omega = curl\vec{A} \cdot \vec{n}\ dS$ 即可，照樣 $df(x,y,z) = f_x dx + f_y dy + f_z dz(*)$，由 $(\star)$：
$\omega = adx + bdy + cdz$
用 $(*)d\omega = a_x dx \wedge dx + b_x dx \wedge dy + c_x dx \wedge dz$
$+a_y dy \wedge dx + b_y dy \wedge dy + c_y dy \wedge dz$
$+a_z dz \wedge dx + b_z dz \wedge dy + c_z dz \wedge dz$
(交換順序並整理得:)
$= [(c_y - b_z)dydz + (a_z - c_x)dzdx + (b_x - a_y)dxdy]$
$= curl\vec{A} \cdot \vec{n}\ dS$
＜得證＞

(c) 當 n=2, k=2 時，(General)Stoke 定理變成了：
Green 定理：
M 為 $\mathbb{R}^2$ 中之簡單連通 (simply connected) 區域，∂M 為 M 之邊界我們取為逆時針方向，
$P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 為 xy 平面上兩純量函數，則

$$\int\int_M (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy$$

＜證明＞
此式僅由 (b)(Special)Stoke 定理退化而成，考慮其二維情況 (z 消失)，再令 a=P,b=Q 即得 ＜得證＞

(d) 當 n=1, k=1 時，(General)Stoke 定理就是：
Fundamental Theorem of Calculus:
（微積分學基本定理）
$M = [a, b] \subset \mathbb{R}, \partial M = \{a, b\}$, $f(x)$ 為 $\mathbb{R}$ 上一可微函數，則

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

＜證明＞
M 退化成 $\mathbb{R}$ 上之閉區間 $[a,\ b]$，a, b 兩點自然為其邊界 ∂M，$\omega = f$，考慮一”水流”通過 $[a, b]$ 必是一進一出，故右式 f 取值為一正一負，而
$d\omega = df = f_x dx = f'(x)dx$ ＜得證＞

參考資料：

１・大一微積分課堂筆記
２・Courant and John:INTRODUCTION TO CALCULUS AND ANALYSIS, Volume II