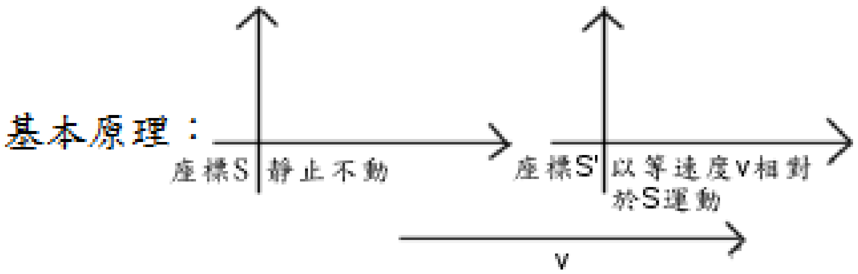
”狹義相對論”的一些公式及題解

雷斌正



當 v 接近光速 c（2.99792458×10^8m/s，通常直接用 3×10^8m/s）時，正在運動中的 S’ 座標之觀測者會觀測到下列種種特殊現象：

（一）長度收縮 (Length Contraction) 現象：
假設同一長度從 S 上之量度長度為 L，從 S’ 上之量度長度為 L’
則 $L' = \frac{L}{\gamma}$
其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$，c 為光速，v 為兩座標之相對速度。

例 1. 有一星球距離地球 5 光年 (light-year), 一太空船欲從地球飛行至此星球，請問太空船要加速到多快才能使此段距離在太空船上測量只有 2 光年？
<題解>

$$\Delta x = 5ly, \Delta x' = 2ly$$

$$\gamma \Delta x' = \Delta x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot 2 = 5$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2}{5}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{4}{25}$$

$$\frac{v^2}{c^2}=1-\frac{4}{25}=\frac{21}{25}$$

$$v=\frac{\sqrt{21}}{5}c\doteqdot 0.917c$$

Q.E.D

（二）時間展長 (Time Dilation) 現象：
Δt 為 S 座標上測量的時間間隔，$\Delta t'$ 為 S' 座標上測量的時間間隔，則

$$\Delta t'=\gamma\Delta t,\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

例 2. 一個鐘放在太空船上，請問這艘太空船要運動到多快的速度才能使地球上的觀測者看到它走慢了一半？
＜題解＞

$$\Delta t'=\gamma\Delta t$$

$$\Delta t'=\gamma(\frac{1}{2}\Delta t')$$

$$\gamma=2$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=2$$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{2}$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{v}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c\doteqdot 0.866c$$

Q.E.D.

（三）羅倫斯 (Lorentz) 座標變換式：
下列 x 代表 S 觀測之位置，t 代表時間點，Δx 代表位移，Δt 表示時間間隔。$x', t', \Delta x', \Delta t'$ 都是由 S' 座標觀察之結果

$$\left.\begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \end{array}\right\} S \longrightarrow S'$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \gamma(x' + vt') \\ t = \gamma(t' + \frac{vx'}{c^2}) \end{array}\right\} S' \longrightarrow S$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) \\ \Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}) \end{array}\right\} S \longrightarrow S'$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t') \\ \Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}) \end{array}\right\} S' \longrightarrow S$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，c 為光速

例 3. 有紅藍兩個閃光燈，紅燈在位置 $x_R = 3m$ 及時間 $t_R = 10^{-9}s$ 閃了一下，藍燈在位置 $x_B = 5m$ 及時間 $t_B = 9 \times 10^{-9}s$ 時閃了一下，以上數據皆由 S 座標測量而得。
但在座標 S' 的測量下，兩事件在同一位置發生
(a) 求 S 與 S' 的相對速度 v
(b) 求 S' 座標測量下兩者發生的位置
(c) 在 S' 座標下求紅燈閃爍的時間點為何？
＜題解＞
(a) 兩閃光燈在 S' 座標下相同位置閃爍，
因 $x' = \gamma(x - vt)$
$x' = \gamma(x_R - vt_R) = \gamma(x_B - vt_B)$
$3m - 10^{-9}v = 5m - (9 \times 10^{-9}) \cdot v$
$v = 2.5 \times 10^8 m/s$
(b)$\frac{v}{c} = \frac{2.5\times10^8}{3\times10^8} = \frac{5}{6}$
$v = \frac{5}{6}c$
求 $x' =?$
$x' = \gamma(x_R - vt_R) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{36}}}(3m - (2.5 \times 10^8) \times 10^{-9}m) = \frac{6}{\sqrt{11}}(3 - 0.25) = \frac{6}{\sqrt{11}} \cdot 2.75 = \frac{16.5}{\sqrt{11}} \doteqdot 4.98m$
(c) 在 S' 座標上紅燈的時間為 t'，則

$$x_R = \gamma(x' + vt')$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(4.98m + vt')$$

又 $v=\frac{5}{6}c=2.5\times10^8 m/s$

$$3=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{36}}}(4.98m+2.5\times10^8\cdot t')$$

$$3=\frac{6}{\sqrt{11}}(4.98m+2.5\times10^8\cdot t')$$

又 $\sqrt{11}\doteqdot 3.316$

$\therefore t'=-1.33\times10^{-8}s$ Q.E.D.

例 4. 某甲在靜止座標 S，測量到 A,B 兩事件同時發生, 發生時間為 2013 年 1 月 15 日 9:00:00。A 發生在距離 S 座標右方 50m，B 發生在 S 座標右方 150m 之位置。某乙在相對於甲的反方向移動 0.8c，也觀測了此兩事件，請問在乙的 S' 座標中，哪一個事件先被觀測到？A,B 兩事件發生的時間間隔為何？

＜題解＞由羅倫斯的時間變換式：

$$\Delta t'=\gamma(\Delta t-\frac{v\Delta x}{c^2})$$

由於在甲（S 座標）觀察到 A,B 同時發生，故 $\Delta t=0$

又 $v=-0.8c, \Delta x=x_B-x_A=150m-50m=100m$

$$\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-0.64}}(0-\frac{(-0.8c)\times100}{c^2})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.36}}(\frac{80}{c})$$

$$=\frac{1}{0.6}(\frac{80}{3\times10^8})$$

$=444\times10^{-9}s=444ns=t'_B-t'_A>0, t'_B>t'_A$

故 A 事件先被乙觀測到，A,B 觀測時間差為 444ns Q.E.D.

（四）羅倫斯 (Lorentz) 速度變換式：

假設 S 及 S' 兩座標系測量到一等速運動體之速度分別為 u_x 及 u'_x，則

$$u'_x=\frac{u_x-v}{1-\frac{u_xv}{c^2}} \Big\} S\longrightarrow S'$$

$$u_x=\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_xv}{c^2}} \Big\} S'\longrightarrow S$$

例 5. 有一敵方太空船以 0.8c 向右駛離地球，另一艘我方太空船以 0.9c 駛離地球欲追上。地球上的觀測者觀測到我方太空船正以 0.1c 之相對速度追

上敵方太空船。現在以地球為 S 座標，我方太空船為 S' 座標，請問敵方太空船被 S' 座標觀測到的速度為何？

＜題解＞ S' 與 S 座標之速度差 v 為 0.9c，u_x 為敵方太空船對 S（地球）之速度，為 0.8c，u'_x 為敵方太空船對 S'（我方太空船）之速度，則

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{0.8c - 0.9c}{1 - 0.72} = \frac{-0.1c}{0.28} \doteqdot -0.357c$$

Q.E.D.

例 6. 一火箭筒以 0.92c 的速度向右移動，相對於靜止的觀測者 A，假設 A 所在之座標為 S。另一觀測者 B 與 A 有相對運動，B 觀測到火箭筒向左以 0.95c 移動，請問 B 對 A 之相對速度為何？

＜題解＞假設 B 所在之座標為 S'，則火箭筒相對於 A 之速度為 $u_x = 0.92c$, 相對於 B 之速度為 $u'_x = -0.95c$

B 對 A 之相對速度為 v

$$-0.95c = \frac{0.92c - v}{1 - \frac{0.92c \cdot v}{c^2}}$$
$$-0.95c + 0.874v = 0.92c - v$$
$$1.874v = 1.87c$$
$$v = \frac{1.87c}{1.874} \doteqdot 0.998c$$

Q.E.D.

（五）相對論動量（$p = \gamma mu$）

當粒子之運動速度 u 接近光速 c 時，則動量 $p = \gamma mu = \frac{mu}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$

例 7. 一個電子的相對論動量是它傳統動量的 3 倍，求此電子之移動速度為何？

＜題解＞ $p = \gamma mu = 3 \cdot mu$

$$\gamma = 3$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = 3$$
$$\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$$
$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3}c \doteqdot 0.943c$$

Q.E.D.

（六）相對論能量（$\Delta E = \Delta mc^2$）

基本概念：$E = K + E_R$

E 為總能量 (Total Energy)= γmc^2

K 為動能 (Kinetic Energy)= $(\gamma - 1)mc^2$

E_R 為靜止能量 (Energy at rest)= mc^2

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，$u$ 為粒子之移動速度

例 8. 一個質子 (Proton) 以 0.95c 的速度運動，請計算

(a) 它的靜止能量

(b) 它的總能量

(c) 它的動能

＜題解＞一質子之質量 $m = 1.67262 \times 10^{-27}\text{kg}$

(a)$E_R = mc^2$

$= 1.67262 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} = 1.5054 \times 10^{-10} J$（焦耳）

$= 1.5054 \times 10^{-10} \times (6.242 \times 10^{18})eV$

$= 9.3967 \times 10^8 eV = 939.67 \times 10^6 eV$

$\doteqdot 939MeV$

(b)

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{939MeV}{\sqrt{1-0.95^2}} = \frac{939MeV}{\sqrt{0.0975}} \doteqdot \frac{939MeV}{0.312} = 3006MeV \doteqdot 3GeV$$

(c)$K = (\gamma - 1)mc^2$

$= \gamma mc^2 - mc^2$

$= E - E_R$

$= 3GeV - 939MeV$

$= 3GeV - 0.939GeV$

$= 2.061GeV$

$\doteqdot 2.07GeV$ Q.E.D.

例 9. 一質子在一高能量加速器加速至 $\frac{1}{2}c$ 的移動速度。使用動能定理來計算需要多少能量來使它加速至 (a)0.75c (b)0.995c

＜題解＞ (a)$K_{\frac{3}{4}c} - K_{\frac{1}{2}c}$

$$= (\gamma_{\frac{3}{4}c} - 1)mc^2 - (\gamma_{\frac{1}{2}c} - 1)mc^2$$

$= (\gamma_{\frac{3}{4}c} - \gamma_{\frac{1}{2}c})mc^2$

$(\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}})mc^2$

$\doteqdot (1.512 - 1.154)mc^2$（質子 $m = 1.67262 \times 10^{-27}kg$）
$= 0.358 \times (1.67262 \times 10^{-27}) \times (9 \times 10^{16})$
$= 5.39 \times 10^{-11}J$（焦耳）
(b)$K_{0.995c} - K_{\frac{1}{2}c}$

$$= (\frac{1}{\sqrt{1-0.995^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}})mc^2$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{0.009975}} - \frac{2}{\sqrt{3}})mc^2$$

$$\doteqdot (\frac{1}{0.09987} - \frac{2}{1.732})mc^2$$

$$\doteqdot (10.013 - 1.155)mc^2$$

$= 8.858mc^2$（質子 $m = 1.67262 \times 10^{-27}kg$）
$= 8.858 \times (1.67262 \times 10^{-27}) \times (9 \times 10^{16})$
$\doteqdot 1.33 \times 10^{-9}J$（焦耳） Q.E.D.

參考資料：

Serway and Jewett:PHYSICS for Scientists and Engineers