關於拉氏變換的反轉公式

雷斌正

工程數學中定義拉普拉斯變換 (Laplace Transform):

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

對於求其反變換 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ 一般都是用部份分式加上查表而得
較複雜的就用拉氏變換的各種性質像 convolution 定理去求

如果還是不行，還有最後一把武器：基於複變函數而來的反轉公式：

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{s_n \in \mathbb{C}} Res(F(s)e^{st}; s_n)$$

本文基於
$http://www.staff.city.ac.uk/\sim george1/laplace\_residue.pdf$
假設你沒學過複變，不知道什麼是留數 (Residue)，什麼是極點 (pole)，照樣可以套用公式算出結果
s_n 為 $F(s)e^{st}$（以 s 為複數變數）在複數 $\mathbb{C}$ 平面上的所有極點，
像 $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$ 在 1 有 2 階極點，在-2 有 1 階極點
求一複變函數 $f(z)$ 在極點 z_0 上的留數公式如下，假設極點 z_0 為 k 階，則

$$Res(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)]$$

例 1. 求 $F(s) = \frac{1}{s+a}$ 的反拉氏變換
函數 $\frac{e^{st}}{s+a}$ 在 s=-a 有 1 階極點，因此

$$Res(F(s)e^{st}; -a) = Res(\frac{e^{st}}{s+a}; -a) = \lim_{s \to -a}[(s+a)\frac{e^{st}}{s+a}] = e^{-at}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+a}] = e^{-at}, t \geq 0$$

$$= 0, \quad t < 0$$

例 2. 求 $F(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$ 的反拉氏變換

函數 $\frac{e^{st}}{(s+a)^2}$ 在 s=-a 有 2 階極點，根據極點的留數公式

$$Res(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z - z_0)^k f(z)]$$

$$Res(\frac{e^{st}}{(s+a)^2}; -a) = \lim_{s \to -a} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds}[(s+a)^2 \frac{e^{st}}{(s+a)^2}] = \lim_{s \to -a}[te^{st}] = te^{-at}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+a)^2}] = te^{-at}, t \geq 0$$

$$= 0, \quad t < 0$$

例 3. 求 $F(s) = \frac{1}{(s+a)^2(s+b)}$ 的反拉氏變換

函數 $\frac{e^{st}}{(s+a)^2(s+b)}$ 在 s=-a 有 2 階極點，在 s=-b 有 1 階極點，它在 s=-b 的留數為

$$\lim_{s \to -b}[\frac{e^{st}}{(s+a)^2}] = \frac{e^{-bt}}{(a-b)^2}$$

它在 s=-a 的留數為

$$\lim_{s \to -a} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds}[\frac{e^{st}}{s+b}]$$

$$= \lim_{s \to -a}[\frac{te^{st}}{s+b} - \frac{e^{st}}{(s+b)^2}] = \frac{te^{-at}}{b-a} - \frac{e^{-at}}{(b-a)^2}$$

故

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+a)^2(s+b)}] = \frac{e^{-bt}}{(a-b)^2} + \frac{te^{-at}}{b-a} - \frac{e^{-at}}{(b-a)^2}, t \geq 0$$

改寫來源：

$http://www.staff.city.ac.uk/\sim george1/laplace\_residue.pdf$