一些複變函數心得

雷斌正

(Taylor series)
若 f 在 $D(z_0,\ R)=\{z\in\mathbb{C}\|0\leq|z-z_0|<R\}$ 為解析（可微），則存在複數 $a_n(n=0,\ 1,\ 2,......)$ 使得

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

在 $D(z_0,\ R)$ 且

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \tag{1}$$

$C(z_0,\ r)=\{z\in\mathbb{C}\|\ |z-z_0|=r\}$ 又

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

所以

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta \tag{2}$$

當 $n=0$ 時,(2) 變成了:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}d\zeta$$

為 Cauchy's Integral Formula 之特殊情形

(Laurent series)

若 f 在 $D'(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \parallel 0 < |z - z_0| < R\}$ 為解析，則存在複數 $a_n(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...)$ 使得

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

在 $D'(z_0, R)$, 若 $0 < r < R$, 則

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \tag{1}$$

當 n=-1 時，它就變成了 Residue Theorem 的一個最簡單形式

$$\int_{C(z_0, r)} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i Res(f; z_0) \tag{3}$$

參考資料：

G. J. O. Jameson:A First Course on Complex Functions